- Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ με $f(x)= x^{\frac{x+1}{x}} \cdot (\sqrt{x^2+1}-x)$.

ΛΥΣΗ

Η f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ επομένως έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της στο $+\infty$.

Για x>0 , έχουμε $x^{\frac{x+1}{x}} = e^{\frac{x+1}{x}\ln x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x+1}{x}\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x =$

$1\cdot(+\infty) = +\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{x+1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{x}\ln x} = +\infty$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$. Έτσι οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή

$(+\infty)\cdot 0$. Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής : $x^{\frac{x+1}{x}} = x^{1+\frac{1}{x}} = x\cdot x^{\frac{1}{x}}$, x>0 και έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [x\cdot x^{\frac{1}{x}} \cdot (\sqrt{x^2+1}-x)] = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x\to+\infty} [x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x\to+\infty} (x\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)} =$$

$e^0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.